Mécanique des fluides

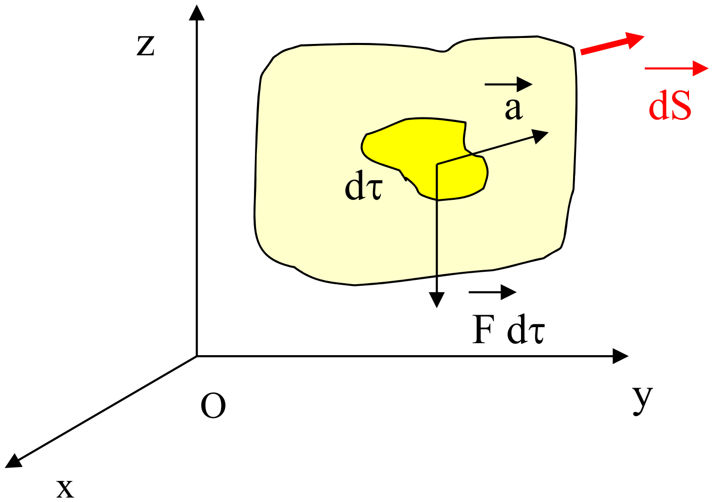
Dynamique des fluides parfaits

Équation d'Euler

Définition

Dans ce chapitre, on ne considère que des fluides dont on peut négliger la viscosité; il n'y a pas de frottements entre les différentes couches de fluides; ces fluides sont dits parfaits.

1- forme générale des équations d'Euler



Sur chaque élément de volume de fluide, on définit :

- ρ la masse volumique
- $\vec{F}$ la densité volumique de force
- $\vec{a}$ l'accélération par rapport au référentiel galiléen O, x, y, z

Équation d'Euler

Écriture de l'équation intégrale

Écrivons la relation fondamentale de la dynamique relativement au référentiel Galiléen O,x ,y,z :

$$\iiint_{\tau} \vec{F}\, d\tau + \oiint_{S} -P\, \vec{dS} = \iiint_{\tau} \rho\, \vec{a}\, d\tau$$

En utilisant la formule du gradient :

$$\oiint_{S} -P\, \vec{dS} = \iiint_{\tau} -\overrightarrow{grad}\, P\, d\tau$$

On obtient donc :

$$\boxed{\iiint_{\tau} (\vec{F} - \overrightarrow{grad}\, P - \rho\, \vec{a})\, d\tau = 0}$$

Équation d'Euler

- Équation locale

La relation précédente est vraie quelque soit l'élément de volume choisi, on peut donc écrire :

$$\boxed{\vec{F} - \overrightarrow{grad}\, P - \rho\, \vec{a} = 0}$$

Cette équation représente la forme locale de l'équation d'Euler (vraie en chaque point du fluide)

A partir du bilan des forces appliquées au fluide et des caractéristiques cinématiques de l'écoulement, c'est cette équation qui nous servira pour l'étude des écoulements.

Équation d'Euler

- Autres expressions de l'équation d'Euler

Dans l'équation précédente, l'accélération du fluide s'écrit (cinématique des fluides)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}.\vec{grad})\vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\vec{grad}\,\vec{V}^2 + \vec{rot}\,\vec{V} \wedge \vec{V}$$

Dans cette expression :

$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ est l'accélération locale (non permanence de l'écoulement)

$\frac{1}{2}\vec{grad}\,\vec{V}^2 + \vec{rot}\,\vec{V} \wedge \vec{V}$ est l'accélération convective (non uniformité de l'écoulement)

Équation d'Euler

- Remarque : une équation dynamique est insuffisante pour une étude complète d'un écoulement

Les caractéristiques de l'écoulement d'un fluide sont données par :

- la vitesse V
- la pression P
- la masse volumique ρ
- la température T

L'équation d'Euler doit donc être complétée par d'autres équations caractérisant le fluide, son mouvement et les conditions d'écoulement

Équation d'Euler

- Éléments à ajouter

Il faut donc ajouter :

- l'équation de conservation de la masse

$$div(\rho \vec{V}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho Q \quad ; Q : débit\ volumique\ de\ production$$

- l'équation d'état du fluide : f (P, ρ, T) = 0

- l'équation caractérisant le type de transformation subie par le fluide (incompressible, isotherme, adiabatique…)

- les conditions aux limites et les conditions initiales qui permettent de déterminer les constantes d'intégration.

Équation d'Euler

- Exemples

Équation caractéristique du fluide

$$\boxed{f\,(P, \rho, T) = 0}$$

- liquide incompressible : $\rho = f(T)$

- liquide légèrement compressible : $\rho = \rho_0(T)\,(1 + \kappa\, P)$

- Gaz parfait : $P / \rho = r\,T$

Transformations subies

Dans le cas de transformations réversibles :

Pour les isothermes : ρ = cste (fluide incompressible) et P / ρ =cste (gaz parfait)

Pour les transformations adiabatiques : ρ = cste (fluide incompressible)

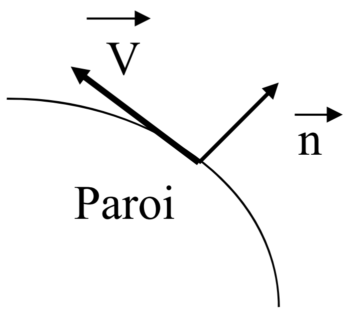
et P / ρ^γ =cste (gaz parfait)

Équation d'Euler

- Exemples

Conditions aux limites : elles sont définies par des parois fixes ou mobiles ou par des surfaces libres

Paroi fixe



L'équation de la paroi est donnée par : F(x, y, z) = 0

En fluide parfait la vitesse est nécessairement orthogonale à la paroi; cette normale est définie par le gradient de la fonction F (x, y, z); la condition aux limites s'écrit donc :

$$\sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$$

Vi est la projection de la vitesse sur x, y ou z et le deuxième terme représente les coordonnées du gradient de F

Équation d'Euler

- Exemples

Paroi mobile

On ajoute simplement à l'équation précédente le terme dépendant du temps, soit :

$$\sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

Surface libre

$$P = cste$$

Relation de Bernoulli

- Les hypothèses de calculs

On considère :

- un fluide parfait (sans viscosité)

- incompressible (ρ = cste)

- en écoulement permanent (les dérivées partielles par rapport au temps sont nulles)

- la densité de force volumique dérive d'un potentiel U

$$(\vec{F} = - \overrightarrow{grad}\, U)$$

- les parois limitant le fluide sont fixes (pas de travail fourni) et adiabatiques (pas d'échange de chaleur avec l'extérieur)

Relation de Bernoulli

- Établissement de la relation : 1ère approche : équation dynamique

Dans cette première approche, on part de l'équation dynamique (l'équation d'Euler) et on tient compte des hypothèses :

$$\vec{F} - \vec{grad}\, P = \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho\, \vec{grad} \frac{\vec{V}^2}{2} + \rho\, \vec{rot}\, \vec{V} \wedge \vec{V}$$

Reprenons les hypothèses :

$\vec{F} = -\vec{grad}\, U \longleftrightarrow$ les forces de volume dérivent d'un potentiel

$\dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0 \longleftrightarrow$ le mouvement est permanent

$\dfrac{\rho}{2} \vec{grad}\, \vec{V}^2 = \vec{grad}\left(\dfrac{\rho \vec{V}^2}{2}\right) \longleftrightarrow$ le fluide est incompressible

Relation de Bernoulli

- 1ère approche :démonstration

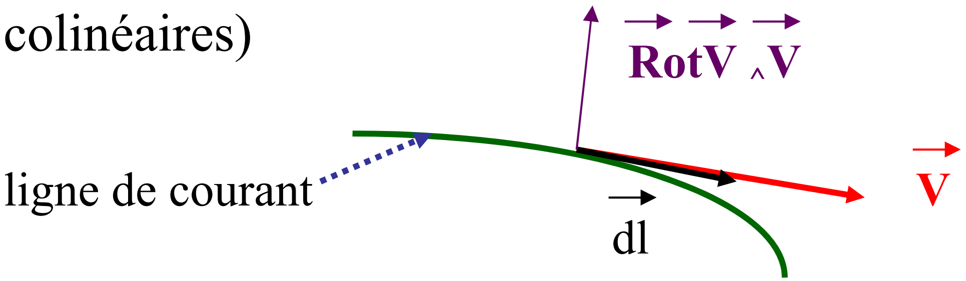
On obtient en remplaçant dans l'équation dynamique :

$$-\overrightarrow{grad}\left(P+U+\rho\frac{\overrightarrow{V}^2}{2}\right)=\rho\,\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{V}\wedge\overrightarrow{V}$$

Considérons une ligne de courant et prenons la circulation élémentaire des deux termes précédents

$$-\overrightarrow{grad}\left(P+U+\rho\frac{V^2}{2}\right).\overrightarrow{dl}=\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{V}\wedge\overrightarrow{V}.\overrightarrow{dl}$$

La figure nous montre que le deuxième terme est nul ($\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{dl}$ sont colinéaires)



Relation de Bernoulli

- Première approche : conclusion

On obtient donc:

$$\vec{grad}\left(P + U + \rho\frac{V^2}{2}\right).\vec{dl} = 0$$

En utilisant le théorème du gradient, il vient :

$$d\left(P + U + \rho\frac{V^2}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P + U + \rho\frac{V^2}{2} = cste}$$

L'analyse du résultat montre que l'unité est le pascal (soit le joule par mètre cube). La somme de ces trois termes représente donc l'énergie mécanique du fluide par unité de volume et celle ci est constante le long d'une ligne de courant.

En général, les forces de volume sont les forces de pesanteur et le potentiel U s'écrit U = ρgz avec g l'accélération de la pesanteur et z la position de la particule de fluide considérée.

Relation de Bernoulli

- Résultat

La relation de Bernoulli s'écrit donc :

$$\boxed{P+\rho\frac{V^2}{2}+\rho g z = cste}$$

Elle s'applique, dans le cas de fluide parfait, incompressible en mouvement permanent, dans le cas où les forces de volume sont les forces de pesanteur avec des parois fixes et sans échange de chaleur avec l'extérieur

Signification physique : c'est une équation de conservation de l'énergie

Le premier terme représente le travail des forces de pression (par unité de volume)

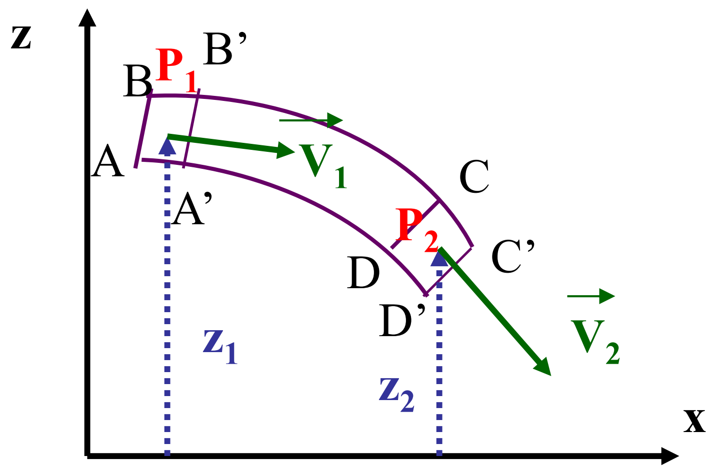
Le deuxième terme représente l'énergie cinétique (par unité de volume)

Le troisième terme représente l'énergie potentielle de situation (par unité de volume)

Relation de Bernoulli

- Deuxième approche : Application du théorème de l'énergie cinétique

Comme nous l'avons vu précédemment, la relation de Bernoulli est une équation de conservation de l'énergie mécanique du fluide au cours de son mouvement, voyons comment retrouver le résultat en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.



Les hypothèses concernant le fluide et l'écoulement sont les mêmes. On considère un filet de courant ABCD à l'instant t. A t + dt, le filet passe en A'B'C'D'.

Relation de Bernoulli

- Théorème de l'énergie cinétique

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au filet de courant entre les instants t et t + dt

$$\frac{1}{2}dm\left(V^2{}_2 - V^2{}_1\right) = dm\,g\,(z_1 - z_2) + \left(P_1 - P_2\right)d\tau$$

$d\tau$ = ABB'A' = CDC'D' = et $dm = \rho d\tau$

On obtient donc :

$$\boxed{\frac{1}{2}\rho V_1^2 + \rho g z_1 + P_1 = \frac{1}{2}\rho V^2{}_2 + \rho g z_2 + P_2}$$

On retrouve bien les trois termes indiquant la conservation de l'énergie mécanique du fluide: énergie cinétique, énergie potentielle de situation et énergie de pression (toujours par unité de volume)

Relation de Bernoulli

- Autres écritures de l'équation de Bernoulli

L'équation de Bernoulli peut s'écrire sous d'autres formes :

a- En divisant tous les termes par ρ, l'unité des différents termes de l'équation devient le joule par kilogramme :

$$\boxed{\frac{P}{\rho} + g\,z + \frac{V^2}{2} = cste} \qquad (\mathrm{J.kg^{-1}})$$

b- En divisant tous les termes de l'équation par ρg, l'unité des différents termes devient le mètre

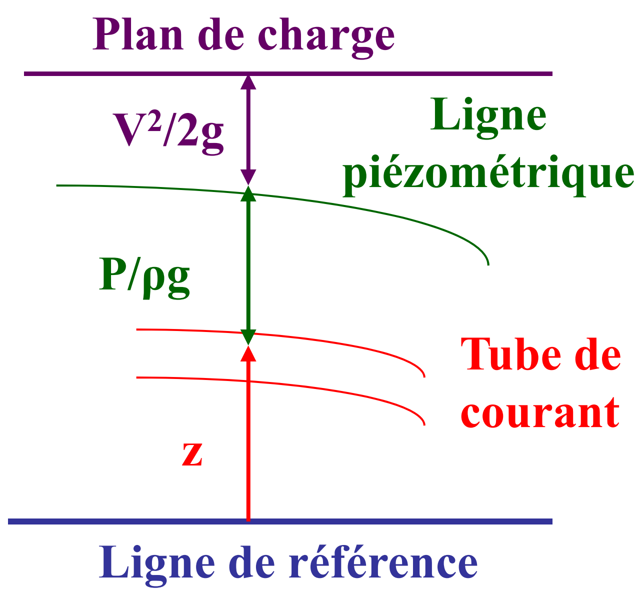
$$\boxed{\frac{P}{\rho g} + z + \frac{V^2}{2g} = h = cste} \qquad (\mathrm{m})$$

Relation de Bernoulli

- Interprétation graphique

Dans le langage des mécaniciens des fluides, l'énergie mécanique du fluide représentée par la somme des trois termes de la relation de Bernoulli est appelée charge de l'écoulement.

L'écriture de la relation de Bernoulli en mètre montre que l'on peut faire une interprétation graphique :



z est la hauteur caractérisant le point choisi (par rapport à une référence)

P / ρg est la hauteur caractérisant une colonne de fluide mesurant la pression

V² / 2g est la hauteur cinétique : c'est la hauteur d'où doit tomber une particule de fluide pour acquérir la vitesse $V = (2gh)^{1/2}$

Relation de Bernoulli

- Quelques remarques

Cas des fluides réels

Pour les fluides réels (ayant une viscosité), la ligne de charge ne sera pas horizontale mais décroissante, cette décroissance indiquera les pertes de charge dans le champ de l'écoulement (les pertes d'énergie). La mise en évidence et le calcul des pertes de charge seront étudiés lors du prochain chapitre.

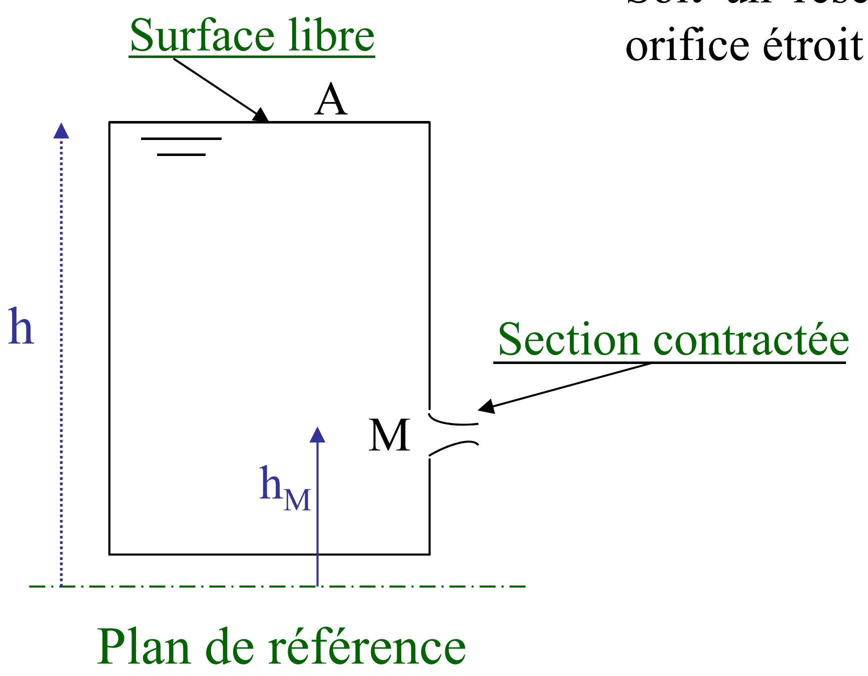
Cas des gaz

Pour des vitesses ne dépassant pas 0.3 fois la vitesse du son, on peut admettre que ρ = cste. En outre, l'énergie liée aux variations de côtes sont souvent négligeables (par rapport aux autres termes). On néglige donc le terme ρgz dans l'équation de Bernoulli.

Quelques applications de la relation de Bernoulli

- Vidange d'un réservoir

Hypothèses de calculs



Soit un réservoir dont le fluide s'échappe par un orifice étroit

Le réservoir est assez grand pour que l'on néglige les variations de niveau de la surface libre pendant le temps Δt et que l'on puisse considérer le mouvement permanent. Le fluide est considéré comme parfait.

A la sortie, le jet présente une section contractée où les lignes de courant sont parallèles et pratiquement rectilignes

Vidange d'un réservoir

Calcul de la vitesse en M

Il existe une ligne de courant entre le point A situé sur la surface libre et le point M dans la section de sortie, on peut donc appliquer la relation de Bernoulli entre ces deux points :

$$P_A + \rho g h_A + \rho \frac{V^2{}_A}{2} = P_M + \rho g h_M + \rho \frac{V_M^2}{2}$$

En considérant les conditions d'écoulement : $P_A = P_M = P_{atm}$, en outre, comme la section du réservoir est grande par rapport à celle de l'orifice la vitesse en A est négligeable par rapport à celle en M : $V_A = 0$ (il suffit d'appliquer la conservation du débit pour s'en rendre compte); en intégrant ces données dans l'équation, on obtient :

$$V = \sqrt{2g(h_A - h_M)}$$ Avec: $h_A - h_M = z$

D'où $\boxed{V = \sqrt{2gz}}$ Formule de Torricelli

Vidange d'un réservoir

- Calcul du temps de vidange

On exprime que le volume évacué pendant le temps dt est égal à la diminution de volume dans le réservoir, soit :

Le volume évacué pendant le temps dt est égal à : $q_V dt$ où q_V est le débit volumique

La diminution de volume dans le réservoir est : $-Sdh$ où S est la section du réservoir et dh la variation de hauteur dans le réservoir pendant le temps dt.

Le débit volumique est égal à: $q_V = c_c V S_O$

Dans cette expression C_C est le coefficient de contraction (la section du jet à la sortie est $C_C S_O$ et V la vitesse du fluide au niveau de l'orifice.

L'égalité s'écrit :

$$c_c S_O V dt = -S\,dh$$

Vidange d'un réservoir

- Calcul du temps de vidange

On obtient : $$dt = -\frac{Sdz}{c_c S_O V}$$

Soit en remplaçant V par sa valeur : $$dt = -\frac{S}{c_c S_O \sqrt{2g}} \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

Pour une vidange complète, l'intégration entre h_A et zéro donne :

$$t = \frac{S}{c_c S_O \sqrt{2g}} \int_{h_A}^{0} \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

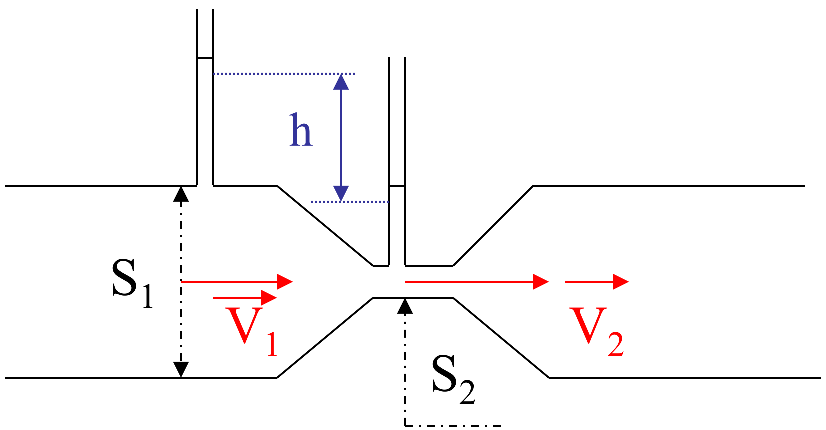
soit

$$\boxed{t = \frac{S}{c_c S_O \sqrt{2g}} 2\sqrt{h_A}}$$

Tube de Venturi

- Description

Le tube de venturi est un tube convergent-divergent muni de prise de pression statique, l'un en amont du convergent, l'autre au niveau du col (voir figure)



Ce tube est intercalé dans une tuyauterie dont on veut mesurer le débit.

De l'eau (fluide parfait incompressible) s'écoule dans le venturi et on appelle h la dénivellation dans les tubes indiquant la pression.

Les vitesses dans S_1 et S_2 sont uniformes

Calculer le débit volumique de l'écoulement.

Tube de venturi

- Application de la relation de Bernoulli : calcul de la vitesse

Soient P_1 et P_2 les pressions dans les sections S_1 et S_2

$$P_1 + \rho g z_1 + \rho \frac{V_1^2}{2} = P_2 + \rho g z_2 + \rho \frac{V_2^2}{2}$$

z_1 et z_2 sont les côtes respectives de la ligne de courant choisie et passant par les section S_1 et S_2

Appelons P_1^* et P_2^* les termes $P + \rho g z$

Avec la conservation du débit en volume ($V_1 S_1 = V_2 S_2$), on obtient :

$$\boxed{V_2 = \sqrt{\frac{2g}{1-(\frac{S_2}{S_1})^2}}\sqrt{\frac{P_1^* - P_2^*}{\rho g}}}$$

Tube de Venturi

- Expression du débit en volume

Le débit de la conduite est donné par

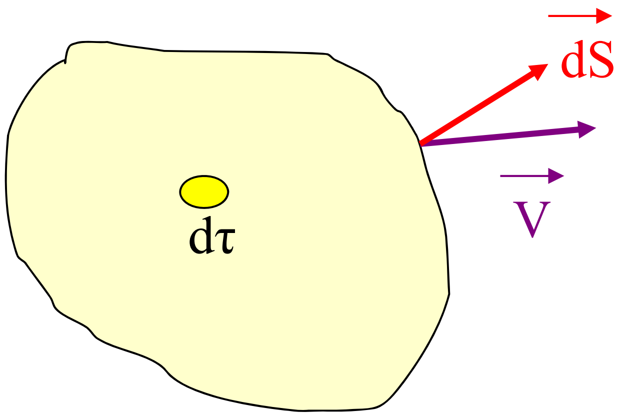
$$q_V = V_2 S_2 = S_2 \sqrt{\frac{2g}{1-(\frac{S_2}{S_1})^2}} \sqrt{\frac{P_1^* - P_2^*}{\rho g}}$$

Avec $P_1^* - P_2^* = \rho g h$

$$\boxed{q_V = S_2 \sqrt{\frac{2gh}{1-(\frac{S_2}{S_1})^2}}}$$

Formule de Bernoulli généralisée

- Hypothèses



On considère l’ écoulement d’un fluide incompressible en régime non permanent dans un volume τ. On appelle F la force volumique exercée par les parois mobiles d’une machine sur le fluide.

On écrit le principe fondamental de la dynamique :

$$\sum \vec{F} - \vec{grad}\, P = \rho\, \vec{a}$$

Soit en développant : $$-\vec{grad}\left(P + \rho g z + \rho \frac{V^2}{2}\right) + \vec{F} = \frac{\rho}{2}\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho\, \vec{rot}\, \vec{V} \wedge \vec{V}$$

Formule de Bernoulli généralisée

- Démonstration

En multipliant par V et en intégrant sur le volume τ, on obtient :

$$\iiint_\tau \vec{V}.\overrightarrow{grad}(P+\rho gz+\rho\frac{V^2}{2})\,d\tau+\iiint_\tau \frac{\rho}{2}\frac{\partial V^2}{\partial t}\,d\tau=\iiint_\tau \vec{F}.\vec{V}\,d\tau$$

Puissance mécanique fournie au fluide dans le volume τ

$$\dot{W}$$

En utilisant l'égalité vectorielle : $div(f\vec{A}) = f\,div\vec{A} + \vec{A}\,\overrightarrow{grad}\,f$

(f : fonction scalaire et $\vec{A}$ champ de vecteur), on obtient en remarquant que

div $\vec{V}$ = 0

$$\iiint_\tau div((P+\rho gz+\rho\frac{V^2}{2})\vec{V})\,d\tau+\iiint_\tau \frac{\rho}{2}\frac{\partial V^2}{\partial t}\,d\tau=\dot{W}$$

Formule de Bernoulli généralisée

- Résultat

Soit en utilisant le théorème de la divergence :

$$\oint\!\!\oint_S \left(P+\rho g z+\rho\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\,.\,\vec{dS}+\iiint_\tau \frac{\rho}{2}\frac{\partial V^2}{\partial t}\,d\tau=\dot{W}$$

Débit d'énergie massique sortant de la surface S

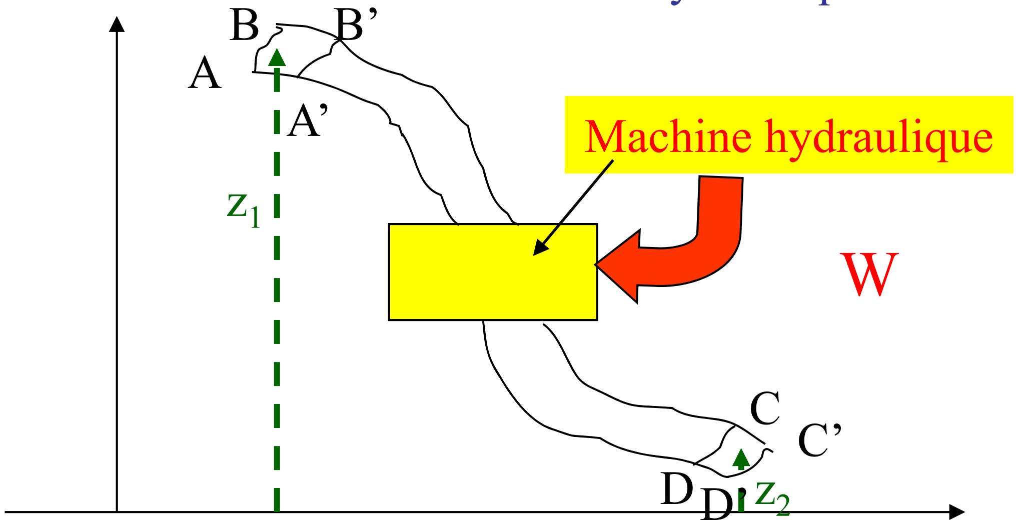
Puissance mécanique fournie au fluide

Application : fluide traversant une machine hydraulique

- Hypothèses

Fluide parfait, en écoulement permanent, au niveau de la machine, les parois fournissent au fluide une énergie mécanique volumique W ($J.m^{-3}$), les échanges de chaleur sont négligés.

On considère à l'instant t un filet de courant ABCD d'un fluide incompressible, dans le champ de pesanteur et traversant la machine hydraulique.



Fluide traversant une machine hydraulique

Résultat et interprétation

A l'instant t + dt, le fluide se trouve en A'B'C'D'

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au filet de courant entre les instants t et t + dt :

$$\frac{1}{2}dm(V_2^2 - V_1^2) = dmg(z_1 - z_2) + (P_1 - P_2)d\tau + Wd\tau$$

Avec dm = ρdτ, on obtient après simplification :

$$\boxed{P_2 + \rho g z_2 + \rho\frac{V_2^2}{2} = P_1 + \rho g z_1 + \rho\frac{V_1^2}{2} + W}$$

W > 0 machine génératrice

W < 0 machine réceptrice

Interprétation : l'énergie du fluide après la machine est égale à celle avant celle ci plus l'énergie fournie par la machine

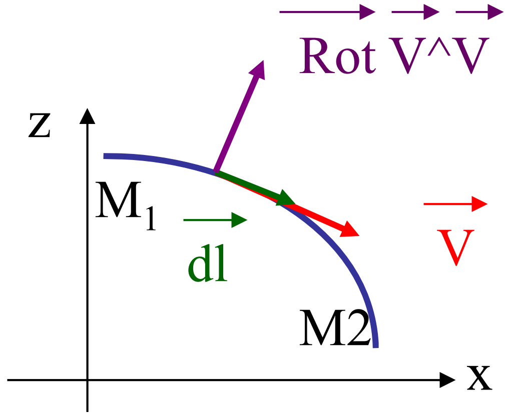
Cas des écoulements non permanents

- Cas de l'écoulement rotationnel

On considère l'écoulement d'un fluide parfait, les forces de volume agissant dérivent d'un potentiel, l'écoulement est non permanent.

On écrit l'équation d'Euler : $\sum \vec{F} - \overrightarrow{grad}\, P = \rho\, \vec{a}$

En tenant compte des hypothèses, et en développant l'expression de l'accélération, on obtient :



$$\overrightarrow{grad}\left(P + \rho g z + \rho \frac{V^2}{2}\right) + \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \rho\, \overrightarrow{rot}\, \vec{V} \wedge \vec{V}$$

On calcule la circulation de l'expression précédente entre M_1 et M_2

Cas de l'écoulement non permanent

- Calcul de la circulation

La circulation à l'instant t le long du filet de courant M_1M_2 donne :

$$\int_{M_2}^{M_2} \overrightarrow{grad}\left(P+\rho gz+\rho\frac{V^2}{2}\right)\overrightarrow{dl}+\rho\int_{M_1}^{M_2}\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial t}\overrightarrow{dl}=\underbrace{-\rho\int_{M_1}^{M_2}\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V}\wedge\overrightarrow{V}.\overrightarrow{dl}}_{=0}$$

L'intégration donne :

$$\boxed{P_2+\rho gz_2+\rho\frac{V_2^2}{2}+\rho\int_{M_1}^{M_2}\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial t}\overrightarrow{dl}=P_1+\rho gz_1+\rho\frac{V_1^2}{2}}$$

Cas de l'écoulement non permanent

- Cas particulier

Cas où la section du filet de courant est constante :

Le fluide est incompressible, il y a donc conservation du débit en volume (div V = 0), comme la section est constante, la vitesse l'est également :

$V_1 = V_2$. A chaque instant V et $\dfrac{\partial V}{\partial t}$ ont la même valeur le long de la ligne de Courant

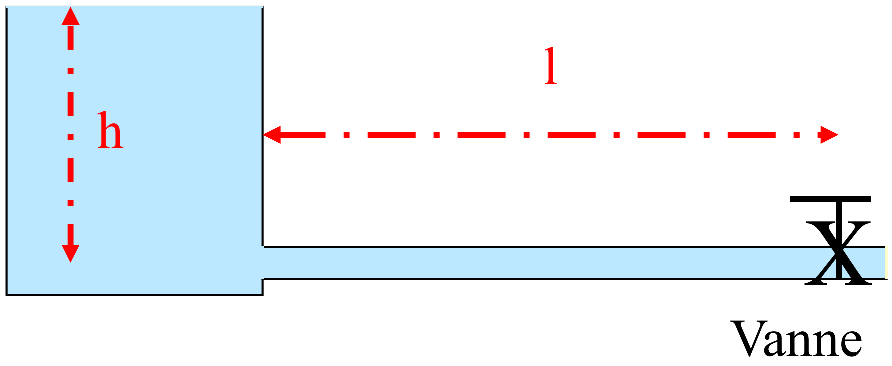
l'expression précédente se réduit donc à :

$$\boxed{P_2 + \rho g z_2 + \rho l \frac{\partial V}{\partial t} = P_1 + \rho g z_1}$$

Application

- Établissement de l'écoulement dans une conduite

Hypothèses : On considère une conduite horizontale, de section constante, de longueur l, alimentée par un réservoir de grandes dimensions où le niveau est maintenu constant. A l'extrémité de la conduite, une vanne permet de réguler le débit. A l'instant t = 0, la vanne est fermée et on l'ouvre brutalement



On cherche la relation entre le temps d'établissement de l'écoulement, la vitesse et la vitesse maximale du fluide

Application

- Solution

En un point à la distance x de O la relation de Bernoulli en régime non permanent s'écrit :

$$P_a + \rho g h = P + \rho \frac{V^2}{2} + \rho \frac{\partial V}{\partial t} x$$

La section du tuyau est constante donc V et $\frac{\partial V}{\partial t}$ ont la même valeur le long du tuyau. En x = l, P = Pa, la relation précédente s'écrit donc :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{g}{l}\left(h - \frac{V^2}{2g}\right)$$

Application

- Expression du temps d'établissement de l'écoulement

Comme V ne dépend que du temps, on peut écrire :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{dV}{dt}$$

L'équation devient donc :

$$dt = 2l \frac{dV}{2gh - V^2}$$

L'intégration donne :

$$t = \frac{l}{\sqrt{2gh}} \ln\left(\frac{\sqrt{2gh} + V}{\sqrt{2gh} - V}\right)$$

Application

- Remarques

L'intégration précédente fait apparaître une constante, mais celle-ci est nulle car la vitesse est nulle à t = 0.

Lorsque $t \to \infty ; V = V_{\max} = \sqrt{2gh}$,on se trouve dans le cas de l'écoulement permanent (formule de Torricelli), on peut donc écrire :

$$t = \frac{l}{V_{\max}} \ln\left(\frac{1 + \dfrac{V}{V_{\max}}}{1 - \dfrac{V}{V_{\max}}}\right)$$

En déduire le temps au bout duquel la vitesse est égale à 90% de $V_{\max}$

Théorème des quantités de mouvement

- Cas général

Énoncé

La dérivée particulaire du torseur [Q] des quantités de mouvement d'un système matériel est égal au torseur des forces extérieures appliquées à ce système

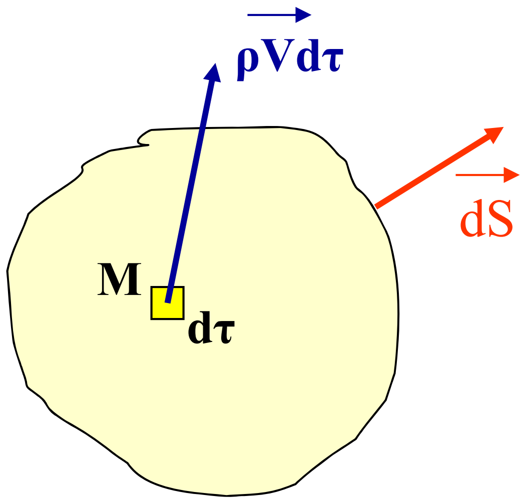
Soit [Fe] le torseur des forces extérieures, la traduction mathématique de l'énoncé est :

$$\frac{d[Q]}{dt} = [F_e]$$

Théorème des quantités de mouvement

- Démonstration

Le torseur [Q] des quantités de mouvement s'écrit : $[Q] = \iiint_{\tau} \rho \vec{V} d\tau$



$\rho \vec{V} d\tau$ est le torseur élémentaire des quantités de mouvement

Développons la dérivée particulaire du torseur des quantités de mouvement en utilisant le résultat obtenu en cinématique des fluides

Théorème des quantités de mouvement

- Démonstration

$$\frac{d[Q]}{dt} = \iiint_{\tau} \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} d\tau + \oiint_{S} (\rho \vec{V}) \vec{V} \vec{n}\, d\vec{S}$$

(Propriété de la dérivée particulaire d'une intégrale de volume)

Le torseur des forces extérieures se composent de deux termes :

Le torseur des forces superficielles : $\left[F_S\right] = \iint_S \left[\vec{\sigma}\right] dS$

Le torseur de forces de volume : $\left[F_V\right] = \iiint_{\tau} \rho \vec{F} d\tau$

L'écriture de l'égalité des torseurs conduit à deux égalités vectorielles :

l'égalité des résultantes et l'égalité des moments résultants

Théorème des quantités de mouvement

- Démonstration

Égalité des résultantes

$$\iiint_{\tau} \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} d\tau + \oiint_{S} (\rho \vec{V})(\vec{V}.\vec{n}) dS = \iiint_{\tau} (\rho \vec{F}) d\tau + \oiint_{S} \vec{\sigma} dS$$

Égalité des moments résultants

$$\iiint_{\tau} \vec{OM} \wedge \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} d\tau + \oiint_{S} \vec{OP} \wedge \rho \vec{V}(\vec{V}.\vec{n}) dS = \iiint_{\tau} (\vec{OM} \wedge \rho \vec{F}) d\tau + \oiint_{S} \vec{OP} \wedge \vec{\sigma}\, dS$$

P est un point à la surface du domaine de fluide considéré et M appartient à son volume

Ces égalités sont générales, vraies quelque soit le fluide et son mouvement

Théorème des quantités de mouvement

- Cas particulier de l'écoulement permanent : théorème d'Euler

Hypothèses: Ecoulement permanent de fluide (compressible ou non)

$$\frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t}=0$$

Réécrivons l'équation des quantités de mouvement :

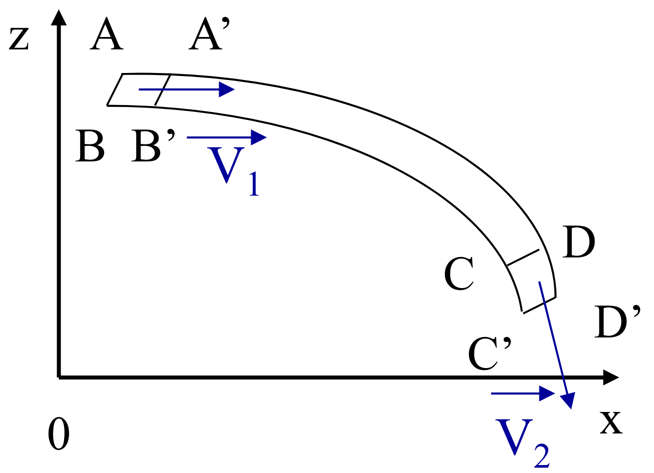
$$\oiint_S (\rho\vec{V})(\vec{V}\,\vec{n})dS=[F_V]+[F_S]$$

Appelons $\vec{R}$ la résultante des forces superficielles et $\vec{P}$ la résultante des forces de volume (poids du fluide)

$$[F_V]=\iiint_\tau \rho\,\vec{F}d\tau \; et \; [F_S]=\iint_S \vec{\sigma}ds$$

Théorème d'Euler

- Résultat



Considérons un tube de courant ABCD à l'instant t ; à l'instant t+dt il est en A'B'C'D'. On appelle q_m le débit massique constant.

Dans le repère galiléen0,x,y,z, le théorème des quantités de mouvement s'écrit :

$$\boxed{q_m(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) = \vec{P} + \vec{R}}$$

Équation d'Euler

Vous pouvez à titre d'exercice retrouver ce résultat à partir de l'équation de la page précédente

Théorème d'Euler

- Énoncé du théorème

En régime permanent, le système des débits des quantités de mouvements sortant de la surface S est équivalent au système des forces appliquées au fluide contenu dans la surface

Conseils pour appliquer le théorème des quantités de mouvement :

-Définir la surface limitant le fluide

-Faire le bilan des forces de pression sur la surface

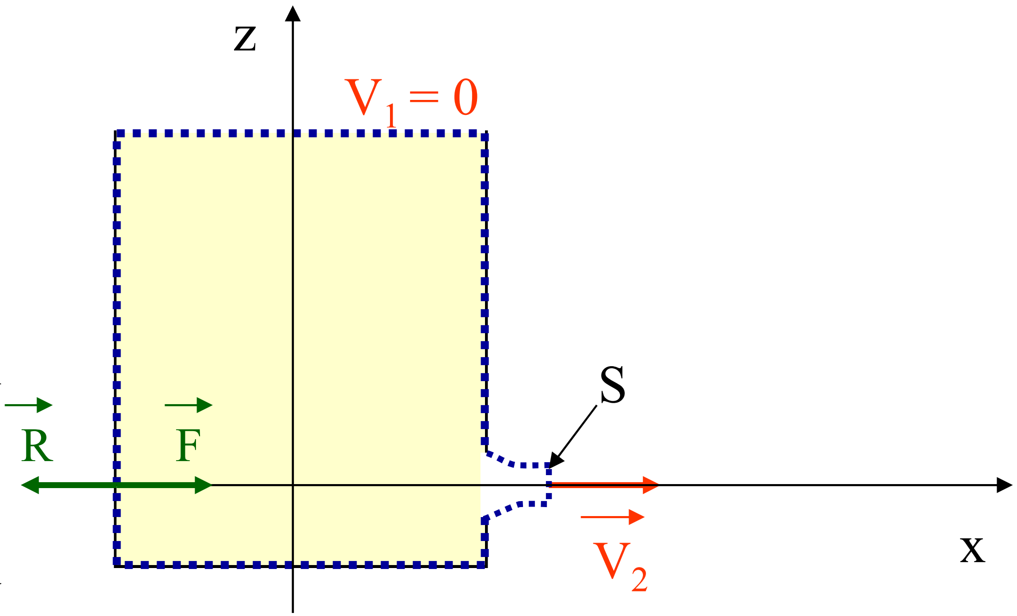
-Faire le bilan des forces de volume

Applications du théorème des quantités de mouvement

- Réaction d'un jet

Hypothèses

On considère un récipient de grandes dimensions, percé d'un orifice d'où s'échappe un jet horizontal.



On applique le théorème des quantités de mouvement au tube de courant (la surface de référence) limité par la surface libre du liquide, le récipient et le jet jusque la section contractée S

Applications du théorème des quantités de mouvement

- Réaction d'un jet

Appliquons le théorème d'Euler : $$q_m(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) = \vec{P} + \vec{F}$$

Projetons cette relation sur les axes de coordonnées :

Sur l'axe x le poids n'intervient pas : $F = q_m V_2$ avec $q_m = \rho S V_2$

Donc $F = \rho S V_2^2$

F est la résultante des forces de pression exercées par l'extérieur sur la surface. A l'inverse, le réservoir subit une poussée égale et opposée appelée réaction du jet :

$$R = -\rho S V_2^2$$

Avec la formule de Torricelli ($V_2^2 = 2gz$), on obtient :

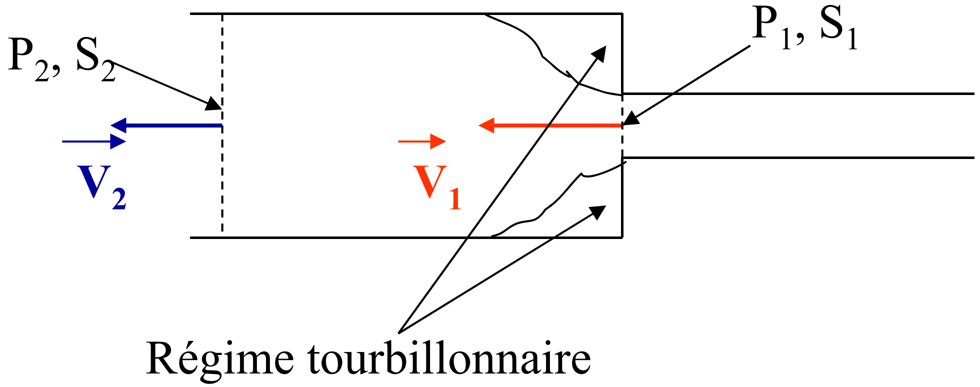
$R = -2\rho g z$ (la réaction est indépendante du milieu qui entoure le réservoir)

Applications du théorème des quantités de mouvement

- Théorème de Bélanger

Cas de l'élargissement brusque

Il s'agit du calcul des pertes de charge accompagnant les brusques variations de section de canalisations. Ces pertes de charge se produisent pour des fluides incompressibles réels mais leurs calculs constituent une très bonne application du théorème des quantités de mouvement.



Il existe une zone de fluide stagnant qui s'accompagne d'un régime tourbillonnaire, dans cette zone, on fait l'hypothèse que le fluide est à la pression P_1

Applications du théorème des quantités de mouvement

- Théorème de Bélanger

On applique le théorème des quantités de mouvement au fluide limité par les surfaces S1, S2, et le corps du tuyau. La projection horizontale du théorème des quantités de mouvement donne :

$$q_m(V_2 - V_1) = P_1S_1 - P_2S_2 + P_1(S_2 - S_1) = S_2(P_1 - P_2)$$

$P_1(S_2-S_1)$ est la poussée de la paroi sur le fluide stagnant

$q_m = \rho S_1 V_1 = \rho S_2 V_2$ on peut donc réécrire l'équation précédente en notant que :

$$\rho S_2 V_2 (V_2 - V_1) = S_2 (P_1 - P_2)$$

$$V_2^2 - V_1 V_2 = V_2^2/2 + (V_1 - V_2)^2/2 - V_1^2/2$$

Remplaçons dans l'équation précédente et divisons par ρg, on obtient :

Applications du théorème des quantités de mouvement

- Résultat

$$\underbrace{\left(\frac{P_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}\right)}_{\text{Charge au niveau de } S_1}-\underbrace{\left(\frac{P_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}\right)}_{\text{Charge au niveau de } S_2}=\frac{(V_1-V_2)^2}{2g}=\frac{V_1^2}{2g}\underbrace{\left(1-\frac{V_2}{V_1}\right)^2}_{\text{Coefficient de perte de charge singulière}}$$

Charge au niveau de S_1

Charge au niveau de S_2

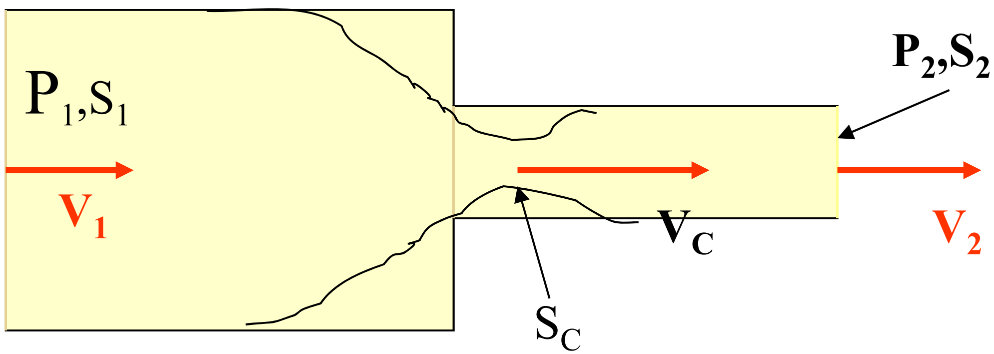
$= \Delta H$ perte de charge singulière

Coefficient de perte de charge singulière

Remarque : le régime tourbillonnaire dans le volume mort s'accompagne d'une transformation de l'énergie mécanique en chaleur

Applications du théorème des quantités de mouvement

- Cas du rétrécissement brusque



Dans le cas d'un rétrécissement brusque, l'expérience montre que la perte de charge ne se produit pas au niveau de la diminution de section du conduit mais lors de l'élargissement entre la section contractée du fluide et la section S_2 en aval. Le calcul se fait comme précédemment, on obtient :

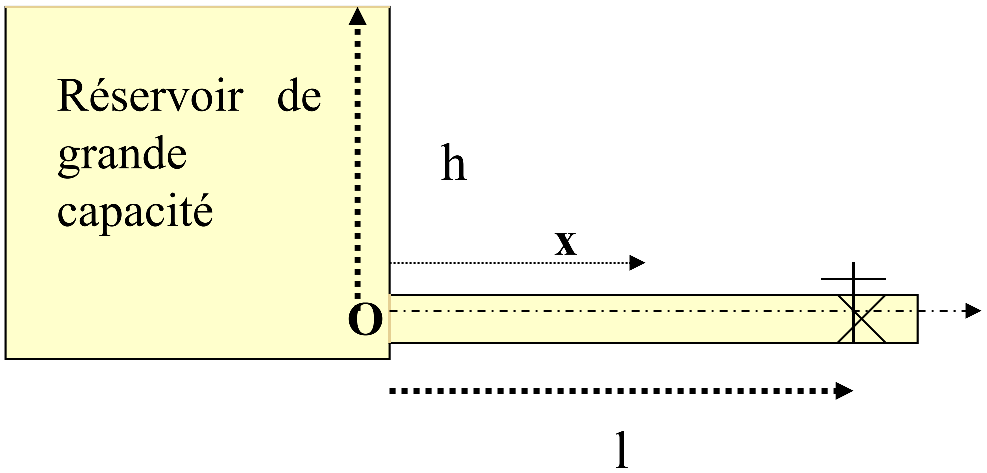
$$\Delta H = \frac{(V_C - V_2)^2}{2g} \; avec \, V_2 S_2 = V_C S_C \; et \; C_C = \frac{S_C}{S_2} \Longrightarrow \boxed{\Delta H = \frac{V_2^2}{2g}\left(\frac{1}{C_C} - 1\right)^2}$$

Applications du théorème des quantités de mouvement

Théorie simplifiée du coup de bélier

On appelle ‘coup de bélier les variations de pression dues à la brusque modification du régime d’écoulement dans une conduite (la fermeture du vanne par exemple). Ces surpressions sont à éviter car elles peuvent provoquer la rupture de la canalisation.

Approche élémentaire:



La vanne est ouverte, la conduite est le siège d’un écoulement permanent de vitesse V_{m}.

La vanne est fermée, la durée de fermeture est t, pendant ce temps la vitesse passe de Vm à 0.

Applications du théorème des quantités de mouvement

- Coup de bélier: approche élémentaire

Lors de la fermeture de la vanne, la quantité de mouvement passe de $\rho S l V_m$ à zéro. La force moyenne qui s'exerce sur la vanne est égale à la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement, soit :

$$F_m = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{\rho S l V_m}{t}$$

La surpression correspondante est obtenue en divisant le résultat par S (section du conduit) soit : $\rho l V_m / t$.

On voit que pour des vitesses importantes et un temps de fermeture court la surpression correspondante peut être très importante et provoquer la rupture de la conduite.

Applications du théorème des quantités de mouvement

- Coup de bélier 2ième méthode

On peut retrouver le résultat précédent en appliquant le théorème de Bernoulli en régime non permanent. Faisons les hypothèses suivantes :

pendant la fermeture de la vanne, la vitesse moyenne de l'écoulement décroît linéairement avec le temps

$$\frac{dV}{dt'} = -\frac{V_m}{t} \Rightarrow V = V_m(1 - \frac{t'}{t})$$

t' est la variable temps et t la durée de fermeture

Appliquons Bernoulli entre un point de la surface libre et un point A à la distance x de l'origine du tuyau :

$$\rho g h + P_a = P + \rho \frac{V^2}{2} + \rho \frac{\partial V}{\partial t'} x$$

Applications du théorème des quantités de mouvement

- Résultat

En écoulement permanent, la pression effective était nulle le long du tuyau, la surpression crée par la fermeture est donc:

$$\frac{\Delta P}{\rho g} = \frac{P}{\rho g} - \frac{P_a}{\rho g} = \frac{P_{eff}}{\rho g} = h - \frac{V^2}{2g} - \frac{1}{g}\frac{dV}{dt'}x$$

Soit en remplaçant dV/dt' par sa valeur

$$\frac{\Delta P}{\rho g} = h - \frac{V_m^2}{2g}(1 - \frac{t'}{t})^2 + \frac{xV_m}{gt}$$

Coup de bélier (action des forces d'inertie)

A l'extrémité du conduit, on a :

$$\boxed{\Delta P = \frac{\rho l V_m}{t}}$$